〔実践論文〕

中学高校の授業でパズルをどのように活用するか

中　原　克　芳

０．はじめに

学校教育、特に授業でパズルを活用する取り組みは、現在は個々の教師が実験的に試みている段階であると思われます。私もその一人で、現在広島市内の私立女子校の中学校と高校で数学を教えつつ、授業でパズルを扱っています。しかし残念ながら、生徒の全員が数学好きでないのと同様に、全員がパズル好きと言うことも普通はありえません。授業にパズルを持ち込むことは授業の脱線にもなりかねないので、不得手な生徒も多いという前提で、それでも楽しんでもらおうという気持ちが大切だと思います。

ここでは数学の授業でパズルを活用することについて、現場での実体験を交えながら、報告していきましょう。

１．授業でパズルを扱う意義

パズルと言えば「問題を解く」、これは誰もが真っ先に思い浮かぶことであり、実際生徒にパズルの楽しさを伝えようと思えば、まずはパズルを解かせることです。パズルを解いた後の達成感・爽快感は数学の問題を解いた後のそれと類似する点が多く、それを味わってもらうことも数学への興味付けの一つとなります。そのため授業の合間にパズルを解かせることは、恐らくは最も多く用いられている方法ではないでしょうか。ただしこれらは息抜きや気分転換の意味合いも強く、授業に直接関係のない内容を扱うことも多いため、ともすれば単なるお遊びの時間になってしまいます。このようなパズルの使用法であれば、わざわざ研究するまでもありません。せっかく貴重な授業時間を使うのであれば、それなりの意義を持ちたいものです。そこで、パズルを授業に持ち込む

ことの意義をもう少し詳しく考えてみましょう。

授業にパズルを持ち込むことには、先に述べた以外にも様々な意義が考えられます。パズルを用いることで、数学の原理を直感的に理解させることや、図形や代数のセンスを養うこともできます。また関連する数学の分野への興味付けもできます。他にも人によって多くの意義が考えられることでしょう。ただしこのような問題提起をすると、多くの方は「生徒にパズルを解かせる」視点から考えるのではないでしょうか。パズルを解かせることはもちろん重要ですが、私はパズルを生徒に解かせるだけではなく、教師がパズル的発想で教材を準備するだけでもパズルの価値が十分に発揮できると考えています。そこで次節からパズルの活用方法を、

（１）パズルを生徒に解かせる

（２）パズルを用いての教材作成（教師による準備）

の２つの点から考えていこうと思います。

２．授業への活用方法（１）パズルを解かせる

生徒にパズルを解かせるとき、例えば知恵の輪やルービック・キューブのように、パズルとしては傑作であっても、授業では扱いにくいものも数多くあります。それは、いわゆるおもちゃ系パズルは実物を手に取ってみないことにはその面白さがわかりませんが、実際に生徒全員分を準備することが大変だからです。そこで最初に、授業で扱う（解かせる）パズルとしてふさわしいものはどのようなものかについて考えてみましょう。

生徒全員にパズルを解かせるために授業で使えるパズルとしては、

①　全員の生徒が遊べるために、生徒の人数分だけ用意できること、

②　問題の意味が容易に理解でき、生徒の興味を引き付けること、

③　難易度が適当で、少なくとも数名の生徒が時間内に解けること、

等の条件は最低条件です。さらに

④　数学、特に今指導している単元と関連があること、

までそろえば、教材としても良いパズルと言えそうです。

上記の条件をもう少し詳しく述べてみましょう。①について、授業と言う限られた時

間の中では、全員が一度に遊べず順番待ちするようであれば、解く側は焦るだけ、待つ側は退屈するだけで、論外です。②については、そもそもパズルとは、その問題の意味と解法が、特別な知識等がなくとも理解でき、そして解く人が楽しめるものでなければなりません。特に授業で扱うパズルには息抜き・気分転換の要素も強いので、遊ぶまでに長々と説明したり面白くなかったりでは、パズルを持ち出す価値がありません。また③は生徒に遊んでもらうためには重要なことで、簡単に解けては面白くないし、難解すぎるものは敬遠されるのが落ちでしょう。パズルに限らず、特に多数で問題を解く場合は、解答者が一人でも出ることは全体に対して多大な好影響を与えるものです。

④のパズルと関連付けしやすい数学の分野としては、因数分解や、順列・組合せ、幾何の諸分野が挙げられます。中でもパズルを用いて数学の概念をつかませることができれば、パズルを授業で扱う上で最も理想的な方法であると言えるでしょう。これらの条件を満たすパズルとしては、ペンシルパズル類、シルエットパズル類、カード並べ等が考えられます。問題点としては、実際に扱える場面が限られるため、定番になってしまうことでしょうか（マンネリ化、または最近は学校外での教育も盛んなため、既にパズルの内容を知っている生徒が現れやすい)。

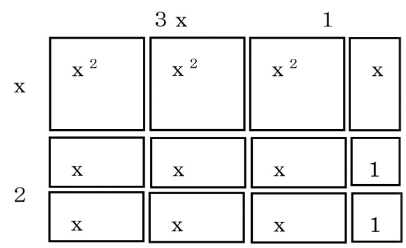
具体例１．（１）べきタイルによる因数分解

［問］ $3x^2+7x+2$ を因数分解せよ。

［解］ x^2（正方形）タイル３枚、ｘタイル（長方形）７枚、１タイル（小正方形）２枚を長方形に並べる。すると右図のように縦 $x+2$，横 $3x+1$ の長方形ができるので、

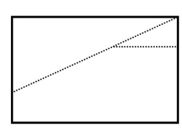
$$3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$$

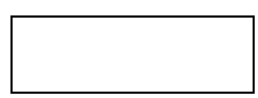
と因数分解できることがわかる。



$\therefore 3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$

（２）裁ち合せによるルートの積＊（以下、＊は中原案のパズル）

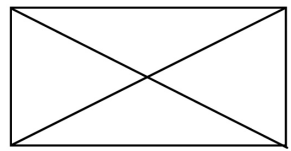




$\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{10}$ が成り立つことを、長方形の面積を用いて説明する方法。まず、面積がそれぞれ２，５，10の正方形を描き（これらは格子を用いれば容易に描けるが、生徒にはそれなりに難しいのでこの作業もパズルになり得る)、その１辺

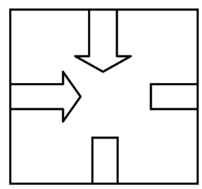
を使って縦$\sqrt{2}$、横$\sqrt{5}$の長方形（前頁図上）と、縦１、横$\sqrt{10}$の長方形（前頁図下）を描く。それらの長方形の面積が一致することを裁ち合わせ（図の点線で切る、ただしこれを生徒に発見させるのは難しい）で確認するもの。

（３）長方形色合わせパズル＊



長方形（縦横の比　１：２）を対角線で４分割したもの（右図）を異なる４色で塗り分ける方法は、$\frac{{}_4P_4}{2}=12$通りになる。それらを隣り合う辺の色が同じになるよう、４×６　の長方形状に並べるパズル。漏れや重複なく12枚のカードを作るまでが数学の確認になる。

（４）矢印パズル＊



右図のように矢印の先と矢尻が描かれたカードの、矢印の部分を２色で塗り分ける方法（１色のみで塗ってもよい）は、全部で$2^4=16$通りある。この16枚のカードを、隣り合う辺は同じ色の矢先と矢尻をつないで　４×４　の正方形を作る。

数学的な内容としては、カードの枚数確認（重複順列）だけでなく、２項定理の確認（$(x+y)^4$の展開における係数１，４，６，４，１が、各カードの色の数、赤０青４が１枚，赤１青３が４枚，赤２青２が６枚，赤３青１が４枚，赤４青０が１枚と一致する）もできる。

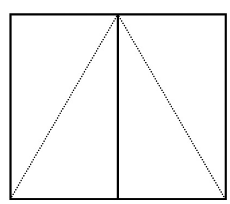
（５）お絵描きベクトル＊

方眼紙に下のベクトルを、前のベクトルの終点を次のベクトルの始点として順にたどって線を結ぶと絵が現れる。ベクトルの成分と矢線の計算が理解できる。

① $3\vec{a}$　② $3\vec{b}$　③ $-3\vec{a}-5\vec{b}$　④ $5(\vec{a}+\vec{b})$

⑤ $-5\vec{a}-3\vec{b}$　ただし、$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$，$\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$とする。

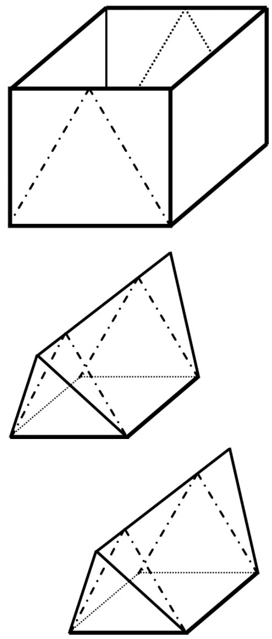
（６）牛乳パックによる正４面体作り＊



その１．牛乳パックの上部と下部を切り落とし、高さ12.1㎝（正確には$7\sqrt{3}$㎝）の筒を作る。この筒を平らに押しつぶし、表裏の側面に正三角形ができるよう、カッターナイフで表面の皮を剥ぐ程度に薄く筋を入れる（右図）。後は切り口がそろうようにこの折り筋に沿って山折りに折れば（上下で切り口

は垂直になる)、正四面体が完成する。

その2．正三角形の高さにあわせて、牛乳パックの底から6㎝（正確には$\frac{\sqrt{3}}{2}$㎝）の所を水平に切り取り、2枚の向かい合う側面に正三角形の辺を描くように、カッターナイフ等で表面の皮を剥ぐ程度に薄く筋を入れる（右上図)。折り目に沿って折り曲げて、最初の切り口の部分が重なるようにつぶすと、側面の正方形と正三角形の半分が台形となって、1つの平面上に来る。そこで切り口をセロテープで接着すれば、底面が正方形、側面が正三角形2枚と台形2枚からなる5面体ができる（右下図)。この5面体を2つ作る。この2つの5面体から正四面体を作るのは、昔から知られている（しかも意外に難しい）パズルである。



（その他パズルが使われる例）

　三平方の定理（裁ち合せ)、天体ショー、覆面算、数当て（2進法・組合せ）

3．授業への活用方法（2）パズルを用いた教材作成

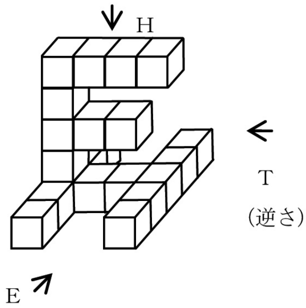
パズルの魅力の一つに、問題であれ解答であれ、「わかりやすい」という点が挙げられます。授業をする以上、この特徴を活かさない手はありません。そこでこの節では、生徒に解かせるのではなく、教師が前もってパズルを準備して、生徒に紹介または実演することについて考えてみましょう。例えば立方体の切断面の形状を考える問題は十分に意外で、それだけでパズルになっています。一方、その切断面を見せるために模型を準備し、演出方法を工夫することもパズルと言えそうです。それは単に実物を切断するだけではありません。例えば透明のケースに着色水を入れるとか、輪ゴムをかけるとかしても切断面が見て取れます。この観点から言えば、単なる立体模型でも十分にパズルになり得るでしょう。最近は模型をコンピュータでの画像処理で見せる授業も多いようです（これもパズルになり得る）が、やはり実物の迫力にはかないません。

上記のように授業に物を持ちこんで生徒の理解を促すものは教具とも言われ、多くは

現場の教師の工夫・手作りによるものです。教具の中でも特にパズル性の高いものは、メカニカルパズル・おもちゃ系パズルとのコラボとも言えるでしょう。

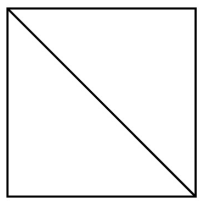
具体例２．（１）（21世紀の数楽パズル）ＴＨＥ立体＊

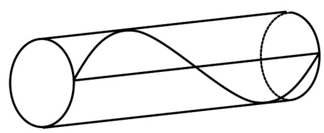
３方向から見たときにＴ，Ｈ，Ｅと読み取れる立体。立体とは３次元空間における図形で、これこそが立体と呼ぶにふさわしく、「ＴＨＥ立体」と名付けた。立方体の積み木21個（だから21世紀（製木？））で作製できる。



（２）三角関数のグラフ

正方形の透明シートに対角線を１本描き、シートを丸めて両端を合わせると、対角線が $y = \sin\theta$ のグラフを描く。





（その他パズルが使われる例）

数列の和の積み木、コロコロリング（数学的帰納法）、２次関数と判別式、

ノナ（正12面体と円順列を用いたパズル）、跳び出す絵本

さて、教具以外にも、授業に教師が準備して臨むパズル的なものはあります。その一つは教師の授業方法です。これは小さい例ではチョークの色分け、また π や $\sqrt{2}$ の語呂合わせ、また授業の本論であるわかりやすく説明するための工夫等、道具は使わないが説明に変化を付け意外性を加味したものであれば、やはり一種のパズルと考えられそうです。

具体例３．（１）替え歌（移項の歌、右囲み参照）。

（２）順列の問題「３人の男子と４人の女子を、

①３人の男子が１人として隣り合わない、

②３人の男子がすべて隣り合う

ように１列に並べる方法はそれぞれ何通りあるか。」

移項の歌（「ﾋﾟｸﾆｯｸ」の節で）

♪　イコール越え移項よ

符号を変えつつ

左辺にｘ集めて

右辺は数の項　♬

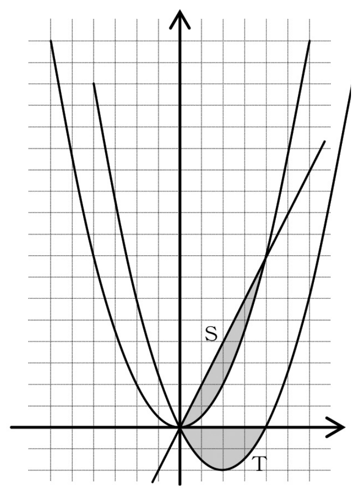
① ♀ ♀ ♀ ♀
∧ ∧ ∧ ∧ ∧
（１人ずつ別々に入れる）

② ♀ ♀ ♀ ♀
∧ ∧ ∧ ∧ ∧
（３人まとめて入れる）

［解］①では、まず女子４人を並べ、その間（含両端）の５箇所中３箇所に男子を並べれば良いので、$4!\cdot{}_5P_3=1440$通り。②のよくある解法は「男子３人を１人と見て、５人と男子の並べ方を合わせて、$5!\cdot 3!=720$通り」というものであるが、これでは似たような問題を別々の方法で解くことになるので混乱が起きやすい。「②も①と同様にまず女子４人を並べ、その間（両端を含む）の５箇所中１箇所に男子３人をまとめて入れれば、男子の並べ方も合わせて、$4!\cdot 5\cdot 3!=720$通り」と、どちらも女子を先に並べれば、混乱が減ると思われる。

（３）組分けの問題＊「６人を２人ずつＡ，Ｂ，Ｃの３組に分ける方法は何通りあるか」

［解］教科書・参考者等では、${}_6C_4\cdot{}_4C_2$で計算させる方法のみが紹介されているが、これはＡ，Ｂ，Ｃを２個ずつ並べる順列に等しいので、$\dfrac{6!}{2!\,2!\,2!}$ で容易に計算できる。



（４）背理法の例題＊「１ｍのひもを２本に切ると、少なくとも１本は50㎝より長い。」

背理法と言っても特別な考え方ではなく、日頃から使う考え方であることを強調できる。

（５）点対称・線対称の確認＊

「あ」の字（逆さ文字・裏文字）で説明すると瞬時に理解される。

（６）積分の線形性＊

右図でＳとＴの面積が等しい（縦線の目盛を調べると理解できる）ことから、積分の線形性

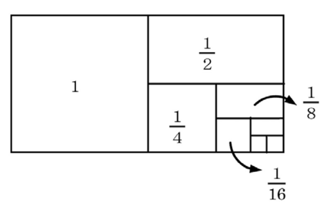
$$\int_0^2(2x-x^2)\,dx=2\int_0^2 x\,dx-\int_0^2 x^2\,dx$$

が成り立つことを説明できる。

（７）無限等比級数

「$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\cdots=2$」

の図形的な証明（右図）。



実はこれらの小さい工夫が、生徒を授業にいかに引き付けるかに関わるため、個々の教師の腕の見せ所でもあるのです。この視点からは、授業に工夫を入れようとする教師であれば、誰もがパズル的な能力を必要とし、またその素質を発揮していると言えるのではないでしょうか。

もう一つ、数学教師はテストをはじめとして、様々な問題を作成する機会が多くあります。ここで問題を自作する際に、生徒が問題を解きやすくするために数値を簡単にしたり、逆に差を付けるために計算を難しくすることがあります。このような問題作成時の解の数値の工夫も、十分にパズル性に富んでいます。ただしこれはパズルと言うより純粋に数学の問題とも言えます（特に解を整数値にしたいときは、未知の整数の問題を解くことに他ならない）。しかしこのような問題作成の報告は意外と少ないので、残念ながら多くの数学教師は意外に無頓着なのかも知れません。

具体例４．（ここでは問題の形で掲載します。なお、ここに挙げた問題はすべて自作ですが、数学の問題のため、類似問題は多々あることと思います。）

問１．$x(x+4)(x+7)(x+11)+180$を因数分解せよ。

問２．次の式を簡単にせよ。

（１）$\sqrt{9+3\sqrt{8}}$　　（２）$\sqrt{5+2\sqrt{11+2\sqrt{10}}}$

問３．不等式 $|x^2-4x|<3x-6$ を解け。

問４．Ａ，Ｂ，Ｃの３人がさいころを投げ，出た目の最も大きい者が勝つというゲームをした。Ａの１人勝ちになる確率を求めよ。

問５．次の連立方程式で表される図形を描け。

（１）$\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$　　（２）$\begin{cases} |x|+|y|=2 \\ x^2+y^2=2 \end{cases}$

問６．平行四辺形ＡＢＣＤにおいて、$AB=7$，$BC=9$，対角線$AC=8$ である。このとき次の値を求めよ。

（１）$\cos B$　　（２）$\cos\angle BAD$　　（３）もう一方の対角線ＢＤの長さ

問７．α，βはともに鋭角で、$\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=\frac{2}{7}$を満たす。次の値を求めよ。

（１）$\sin(\alpha+\beta)$　　（２）$\cos\frac{\alpha}{2}$

問８．方程式 $2\log_6(x-4)+\log_6(x+3)=2$ を解け。

問９．３次方程式 $x^3+2x^2-15x+1=k$ が正の解を１個と異なる負の解を２個持つように、定数ｋの値の範囲を定めよ。またこのときの正の解を α とするとき、α の取る値の範囲を求めよ。

問10．曲線 $y=x^2-3x+1$ と直線 $y=mx$ とで囲まれる図形の面積が $4\sqrt{3}$ になるように、定数ｍの値を定めよ。

問11．$a_{n+1}=10a_n+9$，$a_1=9$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を類推し、数学的帰納法で証明せよ。

問12．$(5x-2)^8$ の展開式における、x^5の係数を求めよ。

［解答と解説］以下、解説末尾の【　】は参考文献（著者はすべて筆者自身、ただし旧姓（清水）名義あり）を表す。

解１．$(x+1)(x+2)(x+9)(x+10)$.

複２次式ですべての項が１次式の積に因数分解できるようにした。【数研通信 No. 18「問題作成の２，３の方法」】

解２．（１）$\sqrt{6}+\sqrt{3}$.　　（２）$\sqrt{5}+\sqrt{2}$.

（１）二重根号をはずすには、中の根号の係数が２でなければならない。それを忘れて和が９、積が８の２数を探し、$\sqrt{9+3\sqrt{8}}=\sqrt{8}+\sqrt{1}=2\sqrt{2}+1$（誤答）のように計算間違いしないよう、注意を喚起する問題。【数学教室11年７月号 実践記録「別解を楽しむ・誤答に学ぶ」】

（２）二重根号を２回はずすだけの問題であるが、成績優秀でも型通りにしかできない生徒は放棄してしまう。一方、数学が苦手な生徒があっさり解くこともある。

解３．$3<x<6$.

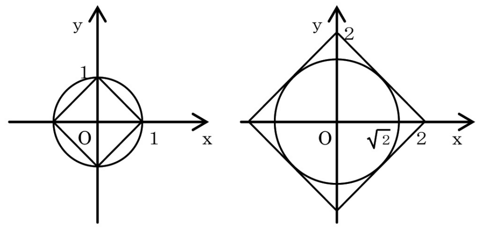
絶対値をはずしたときに現れる２つの２次方程式 $x^2-4x=3x-6$，$x^2-4x=-3x+6$ の解がすべて整数値になるようにした。絶対値の問題では、不適の解の意味もわかりやすい。それを計算を簡単にすることで、より強調した。【数学通信 広島私数研1997年度版「絶対値記号の付いた方程式」】

解４．$\dfrac{55}{216}$.

Ａ＝１のとき、Ａ＝２のとき、…、Ａ＝６ のときと場合分けすれば、求める確率ｐは、$p=\dfrac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2}{6^3}$となって、分子に平方和の公式が使える。平方和の公式は「数列」の単元で学ぶが、生徒には単元にとらわれず数学を扱えるようにしてほ

しい。なお、逆にこの方法を用いて、平方和の公式を求めることも可能である。【数研通信 No. 47「数列の和の計算方法について」】

解５．（右図）右辺の定数の違いだけで、２つの図形の位置関係が逆転してしまう！　生徒には、この不思議さを味わってほしい。



解６．（１）$\frac{11}{21}$.　　（２）$-\frac{11}{21}$.

（３）14.

平行四辺形の２辺と２本の対角線がすべて整数値になるようにした。余弦定理の手ごろな応用問題であるが、（２）で使われる公式 $\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$ も生徒は苦手なようなので、使えるようにしてほしい。

解７．（１）$\frac{19}{21}$.　　（２）$\frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{6}$.

（１）三角関数の加法定理の練習は単なる数値代入に終始しがちであるが、少しでも計算した感じを味わわせるため、答が単項になる工夫をした。

（２）半角の公式に２重根号を絡めた問題。このように過去に学んだ計算が活かせる問題をこっそり入れて確認と計算練習をさせる。一般には、「$\sin\theta$ が有理数のとき、半角の公式において２重根号がはずせる」という知る人ぞ知る定理がある。

（１）（２）とも【数研通信 No. 31「三角関数の公式の練習問題における工夫」】

解８．$x = 6$.

３次の対数方程式で、元の式も対数をはずした式もともに1次式の積に因数分解できるようにした。計算を容易にすることで、因数定理の復習ができる。【数研通信 No. １８「問題作成の２，３の方法」】

解９．$1 < k < 37$,　$3 < \alpha < 4$.

グラフを描けば容易に求める範囲が得られる。ここでも因数定理の確認ができる。解を整数値にすることで計算が容易になるため、数学が苦手な生徒でも最後まで解けて、達成感を味わうことができる。【数研通信 No. 23「極値および x 軸との共有点が有理数となる整数係数の３次関数の決定」】

解10.　$m = 1, -7$.

指数の比較により方程式を簡明にする。具体的に言えば積分の有名な公式により、$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = 4\sqrt{3}$　すなわち、$(\beta-\alpha)^3 = 24\sqrt{3}$ から、$(\beta-\alpha)^2 = (2\cdot 3^{\frac{1}{2}})^2 =$

１２で整数係数の方程式を解くことになる（左辺は解と係数との関係から、mの整式になる）。

解11.　$a_n = 10^n - 1$.

　帰納的定義により一般項を書き並べると、

$$a_1 = 9,\quad a_2 = 99,\quad a_3 = 999,\quad a_4 = 9999,\quad \cdots$$

となって、規則はわかるが（等比数列でないため）それを式では表しにくい。ところが各辺に１を足せば（－１を引けば）

$$a_1 + 1 = 10,\quad a_2 + 1 = 100,\quad a_3 + 1 = 1000,\quad a_4 + 1 = 10000,\quad \cdots$$

となって、今度は $a_n + 1 = 10^n$（等比数列）という規則がわかりやすくなる。このことから、一般に1次の漸化式では各項からある定数を引けば等比数列になることが説明できる。

解12.　-1400000.

　２項定理の公式から、求める係数は ${}_8C_5 \cdot 5^5 \cdot (-2)^3$ であるが、真面目な生徒ほど 5^5 を丁寧に計算しがち。これを５と２の組合せで計算すれば、暗算でもできる。教育の場では、このような落差が印象に残り、生徒の身に付いていくのである。

∞．今後の展望

　パズルと言えば「解くもの」のような認識があり、これまでは「パズルを学校の授業に取り入れること」≒「生徒にパズルを解かせること」のような暗黙の了解がありました。しかし第３節で述べたように、生徒に解かせることだけがパズルではありません。現場の教師にとって、日々の授業の工夫こそがパズルと言えるでしょう。そのためパズル的な発想はこれからの教育現場ではより必要になることが考えられます。しかしそのような工夫はこれまでは個々の教師の工夫の段階で止まり、一つの研究対象として扱われることはほとんどありませんでした。ましてや書籍・文献等で紹介されることもあまりなされていません。今回のように、授業の工夫という視点に立ってのパズルの活用方法の研究は、教育現場に立つ教師にとって、今後ますます必要になっていくことでしょう。